图论杂谈

Para

2025 年 2 月 4 日

目录

前言

声明：鉴于本人水平有限，本次讲课内容较为简单，过程中如有错误，还请各位指正谅解。

本次讲课内容以知识点为主，考虑到图论算法大部分难度并不高但内容较多，我们只会选取部分内容。你可以当做这是一次图论知识复习课。如果你认为其中的内容过于简单，也可以尝试课件中的练习题打发时间。总之，希望你在这段时间有所收获，也祝愿大家在省选中取得满意的成绩。

考点统计

根据笔者统计，收集自 2020 年以来 NOI 系列赛事数据：

- 图的遍历：搜索，拓扑排序【省选联考 2023 过河卒】
- 最小生成树、次小生成树
- 最短路【省选联考 2021 图函数】【NOI2023 贸易】：单源最短路、多源最短路、次短路、差分约束【省选联考 2021 矩阵游戏】
- 连通性问题【省选联考 2023 城市建造】【NOI2021 庆典】【NOI2024 树形图】：DFS 序【NOI2023 深搜】、强联通分量【NOIP2022 建造军营】、割点、割边、2-SAT、圆方树
- 图匹配：二分图、一般图匹配、KM
- 欧拉回路【省选联考 2020 丁香之路】、欧拉道路
- 网络流：网络流【NOI2022 二次整数规划问题】【省选联考 2022 学术社区】【CSP-S 2021 交通规划】、费用流、模拟费用流
- ...【省选联考 2021 支配】

考点分析

图论题目综合性较强，整体难度偏高，难点主要在于模型建构、性质分析等方面。知识点方面，最短路和连通性相关问题有较多的考察。如果不考虑难点在性质观察的题目，图论题的区分度主要在于模型识别（如矩阵游戏）与常见结论或套路的运用（如过河卒）。

最小生成树

- Prim：从一个已选联通块开始，每次选择一条权值最小的连向未选节点的边。
- Kruskal：边权由小到大加入。
- Boruvka：将每个点视为一个联通块，每次从每个联通块向外连一条权值最小的边，每次合并后联通块个数至少减半。

最小生成树

- Prim：从一个已选联通块开始，每次选择一条权值最小的连向未选节点的边。
- Kruskal：边权由小到大加入。
- Boruvka：将每个点视为一个联通块，每次从每个联通块向外连一条权值最小的边，每次合并后联通块个数至少减半。

例 (经典例题：CF888G Xor-MST)

给定 n 个结点的无向完全图。每个点有一个点权为 a_i。连接 i 号结点和 j 号结点的边的边权为 $a_i \oplus a_j$，求这个图的 MST 的权值。

$1 \le n \le 2 \times 10^5$，$0 \le a_i < 2^{30}$。

最小生成树

解

~~学习最小生成树就是为了求最小生成树~~。本题本质上是考察 *Trie* 树，只是用一个最小生成树的算法将题目“翻译”了一遍。

以 *Prim* 为例。首先按照点权建立 *Trie* 树，随便选一个点 u 作为出发点，到 u 边权最小 u' 的一定满足 u, u' 在树上的 *lca* 深度最深。接着将两个点视为一个联通块，继续找连接的下一个点，仍然要满足相连的两个点 *lca* 深度最深。…… 中间忘了，最后可以发现答案就是对于 *Trie* 树上的每个节点，其左子树点集与右子树点集的最小距离求和。复杂度 $O(n \log^2 |a|)$。

最小生成树

例 (小试牛刀：CTS2022 燃烧的呐球)

已知 n 个顶点的有根树，以及 m 个二元组 (x_i, y_i)，其中 x_i, y_i 是树的顶点。对于树的顶点 a, b，定义 $D(a,b)$ 为：在以 a 为根的子树中，但不在以 b 为根的子树中的顶点个数。你需要求出以这些二元组为顶点的完全图的最小生成树，其中 (x_i, y_i) 和 (x_j, y_j) 之间的边权是 $D(x_i, x_j) + D(x_j, x_i) + D(y_i, y_j) + D(y_j, y_i)$。
$1 \leq n \leq 10^6, 1 \leq m \leq 10^5, 12s$

最小生成树

解

考虑 *Boruvka* 算法，那么问题转换为对于每一个节点，找到与它不在同一个联通块中的边权最小的节点。贡献是和的形式，拆开分析每个点的贡献，分析取正负时的条件。剩下的也是平凡的，x, y 均有祖先限制时树剖复杂度过高，用全局平衡二叉树即可。

练：QOJ9904 最小生成树

最短路

- 基本算法：SPFA，DijkStra，Bellman-Ford，Floyd
- 核心思想：$f_i \le f_j + d_{j,i}$
- 扩展算法：
  - 差分约束：用于解决变量之间的形如 $f_i \le f_j + d_{j,i}$ 的限制问题。建图后跑 Floyd、SPFA 或 Bellman-Ford 判断是否有负环，最终的 dis 数组即为变量的一组解。
  - 势能 Dij：用于处理某些含负边权的图。核心思想是将原图中的点赋予点权，将原图中的边权 $d_{i,j}$ 变为 $d_{i,j} + a_i - a_j (\ge 0)$，那么从 s 到 t 的最短路的变化量为 $a_s - a_t$ 是常值。再结合所给图的性质找到满足条件的 $\{a\}$。

最短路

例 (CF827F Dirty Arkady's Kitchen)

给定一张无向图，每条边在时间 $[l_i, r_i)$ 才能通过，通过花费 1 的时间。你不能在原地停留。你在时刻 0 从 1 号点，求最快何时能到达 n 号点。
$n, m \leq 5 \times 10^5, 6s$

最短路

解

由于是无向图，我们可以在一条边两端来回移动，这样会多出一些奇偶性的问题，将每个点拆为奇时间、偶时间两个点即可。对于每一条边，我们可以在其上停留一段时间，右边界已经给定，左边界就是到达这条边的最短时间。
分析转移顺序，对于每个点 v 连接的所有边，按照 l_i 从小到大排序，当处理一条边 (u, v, L, R) 后，将 $l_i \leq R$ 的所有边都加入队列（队列以左边界为关键字），这样就最大化了每条边左边界，因此每条边只会加入一次，跑 *Dijkstra* 即可。

最短路

例 (UR2 跳蚤公路)

给定一个 n 个点 m 条边的有向带权图，边有红绿白三种颜色。现在要选定一个数 x，将红色边权增加 x，绿色边权降低 x，白色边权不变。现在要对每个点 v，分别求出存在多少 x 使得从 1 到 v 的路径上不会有负环。若 x 数量超过 10^{18}，输出 -1。
$n \le 100, m \le 10000$

最短路

解

考虑如何判断负环。相较于普通的负环，这里需要额外记录路径上 x 的系数。*Floyd* 复杂度上无法满足，考虑 *Bellman-Ford*。设 $f_{i,j,k}$ 表示经过至多 i 条边，到达 j，x 的系数为 k 时，最小的边权和。那么存在负环条件为：

$\min\{kx + f_{n,u,k}\} < \min\{jx + f_{n-1,u,j}\}$

值得注意的一点是这里的判定只是充分条件，不满足该条件并不代表路径上不存在负环。该判定的作用是帮助找到图中所有可能存在的负环。现在来处理该判定。固定 u，来求 x 的范围。右侧的最小值容易拆开，对于每个 j 先求出 x 的范围，求并集即可。左侧取交集即可。

练：ICPC2022 Jinan Shortest Path

连通性

- 核心内容：DFS 树，割点，割边，强连通分量，边双，点双
- 扩展算法：
  - 广义圆方树：对图中每一个点双新建一个点，连接该点双中每一个点，最终会形成一个森林。新建的点称为方点，原图中的点为圆点。对于原图中两个点 u, v，任意 u, v 之间的简单路径一定经过 u, v 在圆方树上所经过的圆点与方点所代表的点双。
  - 2-SAT：n 个变量取值为 $0/1$，存在一些若 x_i 为 a 则 x_j 为 b 的限制。根据命题与逆否命题建图后跑 Tarjan。若 x_i 为 $0/1$ 在同一强连通分量中则无解，否则有解。构造方案选择拓扑序较大的。

连通性

例 (LOJ3406 Tom & Jerry)

给定 n 个顶点和 m 条边的无向连通图，Tom 和 Jerry 在图上进行 q 次追逐游戏。第 i 次游戏中，Tom 初始位于顶点 a_i，Jerry 初始位于顶点 b_i，追逐规则如下：

- Jerry 和 Tom 交替行动，Jerry 先行动。
- Jerry 每次可经过任意条边（包括 0），但过程中不能经过 Tom 所在结点。
- Tom 每次行动只能通过无向图中的至多一条边。
- 若 Tom 在行动后到达了 Jerry 的位置，那么 Tom 胜利。

Tom 尽量想要胜利，而 Jerry 会尽量阻止 Tom 胜利。现在你需要对于每一局游戏，求出 Tom 是否一定能在有限次行动内获胜。

$n, m, q \leq 10^5$

连通性

解

考虑 $Jerry$ 的可以如何移动。首先 b 所在的点双中所有的点均可到达，若该点双中不存在一个可到所有点的点，则 $Jerry$ 必胜。
建圆方树，Tom 可以获胜当且仅当存在一个圆点到其它圆点在圆方树上的路径在原图上也是连续的，或者删去 a 后 a 对于 b 所在的连通块满足这个条件。
换根即可，细节略。

练：LOJ3629 序列

欧拉回路

- 无向图欧拉回路判定：顶点度数均为偶
- 无向图欧拉路径判定：存在恰好两个奇度点或同上
- 有向图欧拉回路判定：出度入度相等
- 有向图欧拉路径判定：恰好两个点出度入度差为 1 或同上
- 算法：欧拉回路由多个环组合而成，从一个初始的环出发，不断的扩展新的环，最终就能找到该回路。

欧拉回路

例 (AGC025E Walking on a Tree)

给定一棵 n 个节点的树和 m 条树上的路径，要求为每一条路径定向。第 i 条树边 (a_i, b_i) 的两个方向在存在同向路径经过时能产生 1 的权值（同一方向多次经过只算一次），求最大权值和与定向方案。
$n, m \le 2 \times 10^3$

欧拉回路

解

设每条树边被经过的次数为 c_i，答案上界为 $\sum \min(2, c_i)$。
将 m 条路径视为连边，新图中的一个环对应了树上的一个环（该环上每条边每个方向至少被覆盖了一次）。那么如果新图存在欧拉回路，我们可以达到理论上界。
若新图不存在欧拉回路，即某些点的度数为奇数，可以添加一些树边，容易发现这样跑完欧拉回路后，忽略这些树边，定向方案仍然能达到理论上界。

练：COCI 2022.3 Fliper

二分图

- 二分图匹配：匈牙利算法/网络流
- 最大独立集 = 总点数-最小点覆盖
- 最小点覆盖 = 最大匹配
- 最小边覆盖 = 总点数-最小点覆盖
- Hall 定理：二分图存在完美匹配当且仅当对于任意左部点集 S，其在右部中连接点集为 $N(S)$ 满足 $|N(S)| \geq |S|$。
- 扩展 Hall 定理：一个任意二分图 (V_1, V_2, E) 的最大匹配为 $|V_1| - \max_{S \in V_1}(|S| - |N(S)|)$。
- Vizing 定理：最小边 k 染色等于最大度数（边 k 染色：将每条边染成 k 种颜色之一，使得任意两条共端点的边异色。）

二分图

例 (CF1305H Kuroni the Private Tutor)

一场 n 道试题，m 位学生参加的考试，每一题的分值为 1 分。第 i 个问题答对人数范围为 $[l_i, r_i]$。所有学生的总成绩为 t，排名 p_i 的学生的得分为 s_i，问：

- 最多能有多少人并列第一；
- 在有尽量多的人并列第一的情况下，第一名的分数最高是多少。

$n, m \leq 10^5$

二分图

解

设 a_i 为第 i 道题目的完成人数，w_i 为第 i 名完成的题目数量。我们有如下的限制：

- 总数限制：$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} w_i = t$
- a_i 的限制：$l_i \le a_i \le r_i$
- 排名限制：$w_i \ge w_{i+1}$
- 以及存在一种匹配方案，每个人对每个任务的贡献不超过 1。如何刻画该限制？使用 *Hall* 定理。我们可以得到对于大小为 k 的学生集合，有：$\sum_{i=1}^{n} \min(a_i, k) \ge \sum_{i=1}^{k} w_i'$，当 $w_i' = w_i$ 时限制最紧。

二分图

解

考虑 $l_i = r_i$ 的特殊情况，此时 a_i 确定，可以将限制简化为：

- $\sum_{i=1}^{k} w_i \le W_i$
- $\sum_{i=1}^{m} w_i = s$
- $w_i \ge w_{i+1}$

下面就比较简单了。可以先用固定分数加强 W_i 的限制，即 $W_i = \min(W_i, W_{i+1} - c_{i+1})$，其中 c_i 表示排名为 i 的人的最小完成题目数量。这样 $\sum_{i=1}^{k} w_i \le W_i$ 的限制可以通过人为构造 w_i 满足，现在核心在于满足 $\sum_{i=1}^{m} w_i = t$。二分并列第一人数后贪心即可。

当 a_i 不确定时，a_i 的值越均匀，我们越容易有合法的构造。也可以贪心解决。

练：COCI2018.10 Teoretičar

平面图

- 欧拉定理：连通块个数 = 点 - 边 + 面 - 1
- 平面图最小割等于对偶图最短路

广义串并联图

- 广义串并联图：指一类满足任意 4 个节点都不存在 6 条两两没有公共边的路径连接这些点的无向连通图。
- 可以看出，树或者仙人掌都满足广义串并联图的定义。
- 性质：$m \leq 2n$，图为平面图。
- 性质：广义串并联图可以通过若干次删 1 度点，缩 2 度点，复合重边最终变为一个单点。

广义串并联图

例 (经典例题：SNOI2020 生成树)

给定无向连通图 G，已知 G 在删掉一条边后是一颗仙人掌（仙人掌：不存在两个拥有公共边的简单环的无向联通图），求 G 的生成树个数。结果对 998244353 取模。
$n, m \leq 2 \times 10^5$

广义串并联图

解

设 $f_{i,0/1}$ 表示第 i 条边等价保留/删的局部方案数。

- 删 1 度点：答案 $\times f_{i,0}$
- 缩 2 度点：假设 x 出度为 2，连接的两节点分别为 u,v。
  - $f_0 = f_{(u,x),0} \times f_{(x,v),0}$
  - $f_1 = f_{(u,x),0} \times f_{(x,v),1} + f_{(u,x),1} \times f_{(x,v),0}$
- 复合重边：
  - $f_0 = f_{i,0} \times f_{j,1} + f_{i,1} \times f_{j,0}$
  - $f_1 = f_{i,1} \times f_{j,1}$

练：JOI Open 2022 放学路

练：PR #5 和平共处

二维平面上有 n 只黑蚂蚁。
在接下来的一段时间内，陆陆续续来了 m 只白蚂蚁。然而，黑蚂蚁和白蚂蚁之间会打架，小 H 不希望看到这种现象。小 H 可以给一只蚂蚁喂食，这样它就不想打架了。而如果有一只黑蚂蚁 (x, y) 和白蚂蚁 (X, Y) 满足 $x \leq X, y \leq Y$，并且它们都没得到食物，它们就会打架。
小 H 想知道，在每只白蚂蚁到来后，他至少需要喂食多少蚂蚁才能使蚂蚁不会打架。注意小 H 不会真的喂食，每次他需要计算时，所有蚂蚁都饥肠辘辘。
$n, m \leq 10^5$

解

- 首先考虑某一固定时刻的局面，建图后要求最小点覆盖。这个不好求，转换成最大独立集。不难发现最终的方案是一条从左上到右下的折线将图划分为两部分，问题转换为如何找这条折线。

解

- 首先考虑某一固定时刻的局面，建图后要求最小点覆盖。这个不好求，转换成最大独立集。不难发现最终的方案是一条从左上到右下的折线将图划分为两部分，问题转换为如何找这条折线。
- 考虑动态的加入白点的过程，折线的移动一定是右上方向的，也即是在不断加入白点的过程中，原本位于折线左下的黑点永远不会产生贡献，位于折线左下的白点一定会产生贡献。将这些点全部删除不会影响之后的决策。那么，我们可以离线以 log 的代价进行整体二分。问题彻底变为怎么找折线。

解

- 似乎不好处理。考虑最大匹配和最大独立集的转换。最大匹配可贪心求解。以 x 为第一关键字从大到小处理黑点，每次找到未匹配的、在该黑点右上方且 y 轴距离最接近的白点进行匹配。

解

- 似乎不好处理。考虑最大匹配和最大独立集的转换。最大匹配可贪心求解。以 x 为第一关键字从大到小处理黑点，每次找到未匹配的、在该黑点右上方且 y 轴距离最接近的白点进行匹配。
- 下面尝试进行构造。按 x 从左往右扫描，强制每对匹配出现在折线同侧，未匹配的白点出现在折线左下，未匹配的黑点出现在折线右上。这样构造所得的就是最大独立集，证明略。

练：JOISC 2022 蚂蚁与方糖

初始时有一根木棍。JOI 君将会进行 Q 次操作。第 i 个操作 $(1 \leq i \leq Q)$ 由三个整数 T_i, X_i, A_i 描述，表示：

- 若 $T_i = 1$，JOI 君在坐标为 X_i 的点处放了 A_i 个蚂蚁。
- 若 $T_i = 2$，JOI 君在坐标为 X_i 的点处放了 A_i 块方糖。

当 JOI 君拍手时，每个蚂蚁会执行以下操作：如果存在一块方糖与该蚂蚁距离不超过 L，它会选择任意一块并吃掉。可能存在多个蚂蚁同时吃掉一块方糖的情况。

对于每个 k $(1 \leq k \leq Q)$，JOI 君想要知道以下问题的答案。假设 JOI 君在第 k 次操作后拍了一次手，最多有多少块方糖被至少一个蚂蚁吃掉了？

注意 JOI 君并不会真的拍手。因此蚂蚁的位置不会改变，方糖也不会被吃掉。

解

扩展 *Hall* 定理。那么就是求解 $\max(|S|-|N(S)|)$，放在序列上来看，S 是若干段区间的并，$N(S)$ 是若干段区间分别向两侧延伸 L 后的并。设 a_i,b_i 分别表示两个集合中 $\le i$ 的元素个数，那么一组区间的答案即为

$$\sum_i a_{r_i}-a_{l_i-1}-(b_{r_i+L}-b_{l_i-L-1})$$

可以看出只与 l_i,r_i 有关，设 $f_i=b_{i-L-1}-a_{i-1},g_i=a_i-b_{i+L}$，现在答案为

$$\sum_i f_{l_i}+g_{r_i}$$

所以就是 f,g 交替选择，使得最终和最大。当静态时以直接 dp。下面考虑修改操作。

解

- 修改对 a,b 的影响都是区间加的形式，我们尝试用线段树来维护 dp，用 $f_{l,r,0/1,0/1}$ 记录区间 $[l,r]$ 在首尾分别选 f/g 时的最值。

解

- 修改对 a, b 的影响都是区间加的形式，我们尝试用线段树来维护 dp，用 $f_{l,r,0/1,0/1}$ 记录区间 $[l, r]$ 在首尾分别选 f/g 时的最值。
- a 变化，此时是对 a 的后缀进行区间加。f 数组在 $[i-1, +\infty]$ 减 x，g 数组在 $[i, +\infty]$ 加 x。显然在 $[i, +\infty]$ 中的决策都不会改变，只是值会有所变化，边界处可以特殊处理。

解

- 修改对 a, b 的影响都是区间加的形式，我们尝试用线段树来维护 dp，用 $f_{l,r,0/1,0/1}$ 记录区间 $[l, r]$ 在首尾分别选 f/g 时的最值。
- a 变化，此时是对 a 的后缀进行区间加。f 数组在 $[i-1, +\infty]$ 减 x，g 数组在 $[i, +\infty]$ 加 x。显然在 $[i, +\infty]$ 中的决策都不会改变，只是值会有所变化，边界处可以特殊处理。
- b 变化，此时是对 b 的后缀进行区间加。f 数组在 $[i-L-1, +\infty]$ 加 x，g 数组在 $[i+L, +\infty]$ 减 x。同理在 $[i+L, +\infty]$ 内决策不变。考虑 f 在 $[i-L-1, i+L-1]$ 的区间加。在这个长度为 $2L$ 的区间内，我们是不可能选择两个 f 的，因为这样不如把它们并为一个，同理也不会出现 $...g\ f\ g...$，总之可以得出具体 f 的数量，也容易维护。

Thanks!